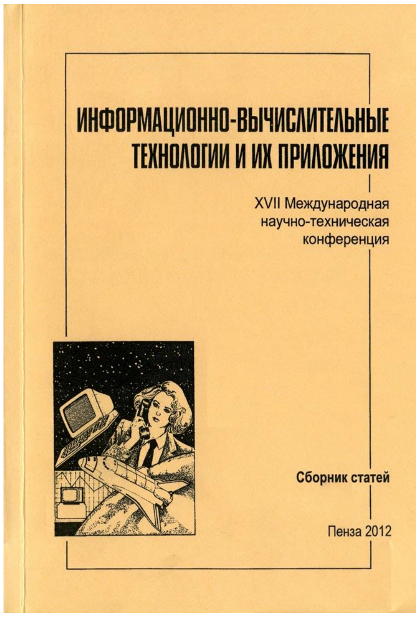


Информационно – вычислительные технологии и их приложения

XVII Международная научно-техническая конференция, Пенза, 2012

ISBN 978-5-94338-554-4

А. В. Творогов

ЭФФЕКТИВНЫЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КВАДРАТОВ ЧИСЕЛ ДО 100

Ссылка:

Творогов А. В. Эффективный геометрический алгоритм вычисления квадратов чисел до 100 // Информационно-вычислительные технологии и их приложения: сборник статей XVII международной научно-технической конференции / МНИЦ ПГСХА. – Пенза: ПГСХА, 2012 г. – с. 79–84.

ЭФФЕКТИВНЫЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КВАДРАТОВ ЧИСЕЛ ДО 100

А. В. Творогов

Московский государственный университет

г. Москва, Россия

Принцип *геометризации* в наглядной арифметике [1] отдаёт приоритет визуальным образам, упрощающим алгоритмы вычислений в уме. Предлагаемый ниже алгоритм возведения в квадрат двузначных чисел использует геометрические образы, способствующие снижению субъективной сложности вычислений и уменьшению нагрузки на память.

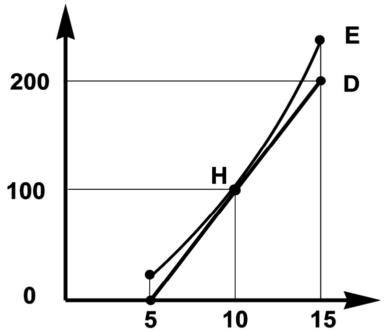
Совокупность вычислительных действий, основанных на геометрических схемах, составляет арсенал скоростной *визуальной технологии устного счёта*. Вместе с тем, ничто не мешает применять указанный алгоритм в традиционной *аудиомоторной технологии устного счёта*, где каждое проводимое арифметическое действие сопровождается словесными фразами, которые тормозят скорость ментальных вычислений.

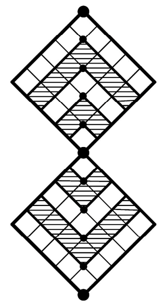
Известный стандартный алгоритм возведения двузначных чисел в квадрат основан на формуле $(10\,N + A)^2 = 100\,N^2 + 20\,NA + A^2$.

Цифровая разрядная запись даёт $[H;\ D;\ E] = [N^2;\ 2NA;\ A^2]$. Данная формула очевидна, но, тем не менее, не является самой эффективной. Трудности счёта возникают при нормализации разрядов десятков и единиц, превышающих 10, например:

$$28\times28 = [\ (2\times2); (2\times2\times8); (8\times8)\ ] = [\ 4; 32; 64\ ] = 784.$$

Метод *пифагоровых схем* [2] позволяет упростить расчёты. Рассмотрим интервал множителей от 5 до 15 (рис. 1). В левой части рисунка показаны исходные геометрические схемы, которые находится в памяти человека-вычислителя, а справа – поразрядные расчёты. Здесь величина L показывает «добавок сверх 5 (или 10)».



C	H	E
10	0×1 1×1 1×2	

C	L	H	D 2L	E	C×C
5				25	25
6	1		2	16	36
7	2		4	9	49
8	3		6	4	64
9	4		8	1	81
10		1			100
11	1	1	2	1	121
12	2	1	4	4	144
13	3	1	6	9	169
14	4	1	8	16	196
15		2		25	225

Рис. 1. Вычисление квадратов для чисел { 5; 15 }

На предварительной <u>первой стадии</u> вычислений исходное число приводится к виду «Базовое число ± A» = [N;A]. Здесь A может принимать отрицательное значение. Величина единиц заключена в промежутке $(-5)\le A\le 5$.

<u>Вторая стадия</u> расчёта даёт квадрат базового числа N. Величина в разряде сотен равна $H=N\times N$. Для расчётов полезно знать формулы сокращенных вычислений для квадратов чисел, оканчивающихся на 5:

$$(10N-5)^2 = [\ ((N-1)\times N);\ 2;\ 5\ ] = 100\times(N-1)\times N + 25.$$

$$(10N+5)^2 = [\ (N\times(N+1));\ 2;\ 5\ ] = 100\times N\times(N+1) + 25.$$

Первое приближение берем по левой части интервала $(10N-5)$, здесь величина сотен квадрата $\mathbf{C^2}$ находится из формулы $H_{-}=(N-1)\times N$.

<u>Третья стадия</u> вычислений учитывает коррекцию разряда десятков на величину $D(N;A)=2\times N\times A$, причём величина A по абсолютной величине не превосходит 5. Следуя стандартной формуле, в качестве первого приближения нужно взять квадрат базового числа $100\times N^2$, затем требуется добавить или вычесть величину $2\times N\times A$.

Для повышения эффективности алгоритма произведём его модификацию. Введём новую переменную L, равную *числу шагов от левого края* интервала $(10N-5)$ до числа [N;A]. Например, для C=17 величина L равна расстоянию от числа 15 до 17, т.е. $L(17)=17-15=2$. Применяя $L>0$ в расчёте, мы оперируем только с положительными слагаемыми.

Обозначим символом S число шагов (со знаком ±) от базового полного десятка 10N до заданного множителя [N;A]. Для числа [N;A], приведенного к базе, S=A и $|S| \le 5$. Использование символа S исключает возможную путаницу с разрядом единиц, которая может возникнуть при разных способах записи множителя, например, 17=[1;7]=[2;(–3)].

Эффективная формула для вычисления квадрата числа в интервале {(10N–5); 10N} зависит от двух вспомогательных величин L и S:

$$\boxed{\mathbf{(10N-5+L)^2 = [\,N(N-1);\ (2NL);\ S^2],}\quad \text{где}\quad S = L-5.}$$

Для интервала {(10N); (10N+5)} меняется разряд сотен:

$$\boxed{\mathbf{(10N+L)^2 = [\,N^2;\ (2NL);\ S^2],}\qquad \text{где}\quad S = L.}$$

<u>Четвёртая стадия</u>. Добавляем к промежуточному результату расчётов величину в разряде единиц S^2. Эти числа S^2 будем называть *пифагоровыми квадратами*, чтобы отличать их от квадрата исходного числа $\mathbf{C^2}$.

<u>*Примеры*</u>. Возведём в квадрат множитель $17 \in \{15;\ 25\}$, методом пифагоровых схем (рис. 1). Здесь N=2.

$$\mathbf{L}(17) = 17–15 = 2;\quad \mathbf{S}(17) = –3;\quad \mathbf{17{\times}17} = [2; (–3)] = [((2–1)\times2); (2\times2\times\mathbf{L}); \mathbf{S^2}];$$

$$\mathbf{17{\times}17} = [\ 2;\ (4\times2); (–3)^2\ ] = [\ 2; 8; 9\ ] = \mathbf{289}.$$

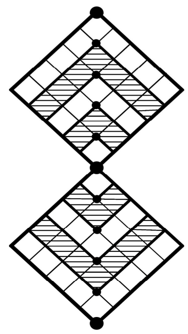
Для множителей, у которых единицы $0 \le A \le 5$ расчет проводится по стандартной формуле: **23×23** = [(2×2); (2×2×3); (3×3)] = [4; 12; 9] = **529**.

Найдём 28×28. Базовый промежуток $28 \in \{25;\ 35\}$, N=3 (рис. 2).

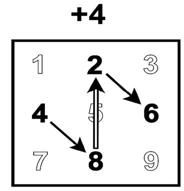
$$\mathbf{L}(28) = 28–25 = 3;\quad \mathbf{S}(28) = –2;\quad \mathbf{28{\times}28} = [3; (–2)] = [((3–1)\times3); (2\times3\times\mathbf{L}); \mathbf{S^2}];$$

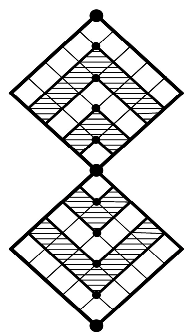
$$\mathbf{28{\times}28} = [\ 6; (6\times3); (–2)^2\ ] = [\ 6; 18; 4\ ] = \mathbf{784}.$$

В геометрических схемах использованы линейные последовательности чисел. Методы наглядной арифметики позволяют упростить трудоёмкий этап вычисления десятков D, используя считывание цифр с телефонной матрицы по определённым правилам. Потребуются чётные молнии Т-матрицы (рис. 3), показывающие единицы для суммы (2N+…+2N).

C	H	E
20	1×2 2×2 2×3	

C	L	H	D 4L	E	C×C
15		2		25	225
16	1	•	4	16	256
17	2	•	8	9	289
18	3	•	12	4	324
19	4	•	16	1	361
20		4			400
21	1	•	4	1	441
22	2	•	8	4	484
23	3	•	12	9	529
24	4	•	16	16	576
25		6		25	625



C	H	E
30	2×3 3×3 3×4	

C	L	H	D 6L	E	C×C
25		6		25	625
26	1	•	6	16	676
27	2	•	12	9	729
28	3	•	18	4	784
29	4	•	24	1	841
30		9			900
31	1	•	6	1	961
32	2	•	12	4	1024
33	3	•	18	9	1089
34	4	•	24	16	1156
35		12		25	1225

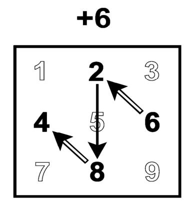


Рис. 2. Вычисление квадратов с помощью молний Т-матрицы

Продемонстрируем «геометрический» расчёт квадратов 16×16, 17×17, 18×18, 19×19, используя методический приём *передвижения фишки по телефонной матрице*.

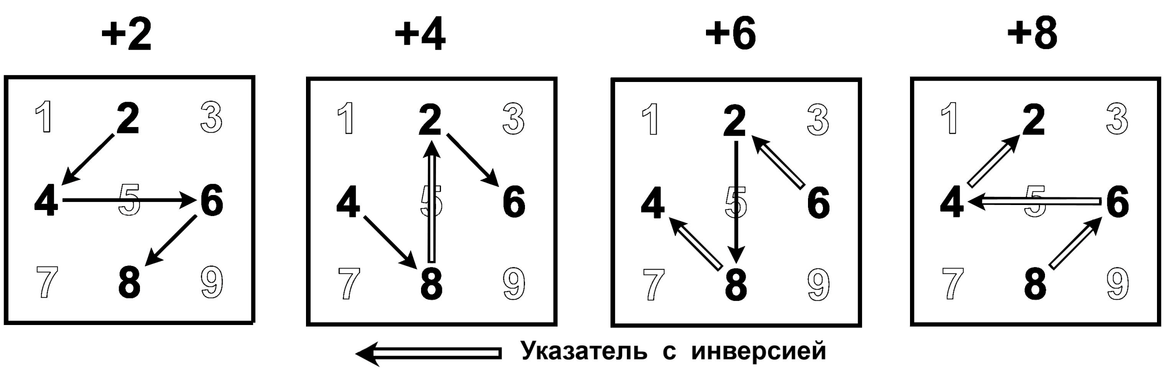


Рис. 3. Четные молнии на Т-матрице

<u>Шаг 1</u>. Для квадрата 15×15 вычисляем в уме сотни $H_0=1\times2=2$. В точке 15 фишка находится вне Т-матрицы, здесь D=0. В разряде единиц добавляем пифагоров квадрат 5×5=25. Ответ 15×15 = [2; 0; 25] = 225.

<u>Шаг 2</u>. Считаем 16×16. Находим смещение L=1, S=(–4). Базовый десяток N=2. Номер нужной нам молнии 2×2=4. Перемещаем фишку по 4-ой молнии на один шаг к первому узлу с числом D=4. Сотни $H_{новое}=H_0=2$. Величина единиц равна пифагорову квадрату $S^2=4\times4=16$. Ответ 16×16 = [2; 4; 16] = 256.

<u>Шаг 3</u>. Найдём 17×17. Перемещаем фишку по 4-ой молнии на второй узел. В отмеченной точке на Т-матрице видим D=8. Сотни не изменились H=2. Пифагоровы единицы $S^2=3\times3=9$. Ответ 17×17 = [2; 8; 9] = 289.

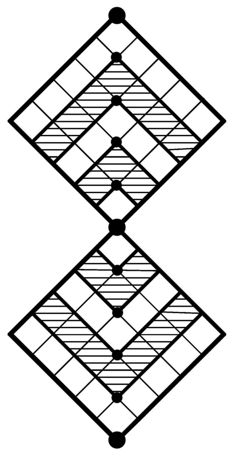
<u>Шаг 4</u>. Вычислим 18×18. Перемещаем фишку по 4-ой молнии на третий узел. Проекция на телефонную матрицу даёт D=2. Так как при переходе по указателю (8→2) возникла *инверсия* (обращение порядка чисел), к разряду сотен H нужно добавить единицу: $H_{новое}=H_{старое}+1=2+1$. Пифагоровы единицы $S^2=2\times2=4$. Ответ 18×18 = [H; D; E] = [(2+1); 2; 4] = 324.

<u>Шаг 5</u>. Определим 19×19. Следующее перемещение по 4-ой молнии приведёт фишку к числу D=6. Инверсии на указателе (2→6) нет, поэтому $H_{новое}=H_{старое}=3$. Пифагоровы единицы $S^2=1\times1=1$. Ответ 19×19 = [3; 6; 1] = 361.

Отметим, что результат 19×19 можно получить, не подсчитывая промежуточные значения квадратов множителей 16^2, 17^2, 18^2. Перемещая фишку по указателям молнии, не нужно обращать внимание на цифры рядом с узлами молнии. В конечной точке маршрута цифра D(19×19) написана на Т-матрице. Пифагоровы единицы $E=S^2=1\times1=1$. Подсчитав количество инверсий Inv на маршруте, увеличиваем начальную оценку сотен: $H_{новое}=H_0+Inv$.

Тот же результат 19×19 можно получить, перемещая фишку *от базового числа 20* против указателей 4-молнии, где сотни $H_0=2\times2=4$. На Т-матрице D=6, E=1×1=1. Шаг против направления указателя (6→0) с инверсией требует уменьшить H на 1. Поэтому 19×19 = [(4–1); 6; 1] = 361.

В диапазоне от 45 до 55 десятки для C×C вычислять не нужно.

C	H	E
	4×5	
50	5×5	
	5×6	

C	L	H	D 10L	E	C×C
45		20		25	2025
46	1	•	10	16	2116
47	2	•	20	9	2209
48	3	•	30	4	2304
49	4	•	40	1	2401
50		25			2500
51	1	•	10	1	2601
52	2	•	20	4	2704
53	3	•	30	9	2809
54	4	•	40	16	2916
55		30		25	3025

Рис. 4. Вычисление квадратов чисел от 45 до 55

В разрядах [D; E] результатов C^2 записаны пифагоровы квадраты (рис. 4), и каждый шаг увеличивает разряд сотен H на единицу.

Литература.

1. В. Б. Творогов. Наглядная арифметика и технология быстрого счёта. Кн.1: Основы. М.: Издательский дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 208 с. ил.

2. А. В. Творогов. Визуализация устных вычислений с помощью пифагоровых схем. – Современные технологии в системе образования. Сборник статей Международной научно-практической конференции. / МНИЦ, ПГСХА. - Пенза, 2012. - с.113-118.