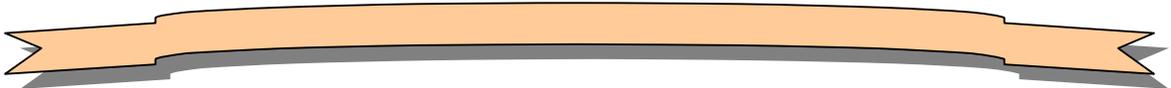




Информационно – вычислительные технологии и их приложения

XVII Международная научно-техническая
конференция, Пенза, 2012

ISBN 978-5-94338-554-4



А. В. Творогов

ЦИФРОВЫЕ ВЕРТУШКИ ДЛЯ РАСЧЁТА КВАДРАТОВ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Ссылка:

Творогов А. В. Цифровые вертушки для расчёта квадратов двузначных чисел // Информационно-вычислительные технологии и их приложения: сборник статей XVI международной научно-технической конференции / МНИЦ ПГСХА. - Пенза: ПГСХА, 2012 г. – с. 74–79.

ЦИФРОВЫЕ ВЕРТУШКИ ДЛЯ РАСЧЁТА КВАДРАТОВ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

А. В. Творогов

Московский государственный университет

г. Москва, Россия

Цифровые вертушки (ЦВ) представляют собой механические инструменты счёта, оказавшиеся в центре внимания благодаря концепциям наглядной арифметики и визуальной технологии устного счёта [1]. Принцип действия цифровых вертушек можно показать, наложив друг на друга с поворотом две телефонные Т-матрицы. Возникающие парные комбинации цифр позволяют указать все результаты сложения, вычитания, умножения однозначных чисел. Естественно возникает вопрос о том, можно ли применить принцип ЦВ для более сложных вычислений? Ответ положительный.

В данной статье впервые обсуждается методика применения в расчётах специальной *пифагоровой* цифровой вертушки, описание которой содержится в действующем патенте РФ [2], позволяющей возводить в квадрат двузначные числа. *Пифагоровой* вертушка названа потому, что её математическое обоснование дают *пифагоровы схемы* вычислений.

Конструкция пифагоровой ЦВ имеет две параллельных плоскости – неподвижную *основу* и *пропеллер* (рис. 1). Пропеллер допускает повороты на прямые углы вокруг центра всей фигуры.

Некоторым точкам основы приписаны числа, которые будут показывать *десятки* числового результата. Над этими выделенными точками, но уже на плоскости пропеллера, расположены числа, которые попадают в разряд *единиц* результата. В одном положении поворота с помощью специальной ломаной линии (*молнии*) в одиннадцати выделенных точках можно последовательно прочитать десятки и единицы [D;E] квадратов чисел, попадающих в окрестность базового десятка ($10N$), а именно, от $(10N-5)$ до $(10N+5)$.

На основной неподвижной плоскости к центральной точке приписано число $D=0$. Симметрично относительно центра изображены четыре Т-матрицы с чётными цифрами $D>0$, причём две Т-матрицы образуют вертикаль, а две другие Т-матрицы расположены вдоль горизонтали. Еще дальше от центра, вне границ Т-матриц, выделены точки, которым приписаны значения $D=0$.

В конструкции ЦВ можно одновременно показывать решения на всех четырёх Т-матрицах. Однако, для удобства применения в устном счёте, будем использовать одновременно только два варианта расположения Т-матриц и молний – или *вертикальное*, или *горизонтальное* (рис. 1).

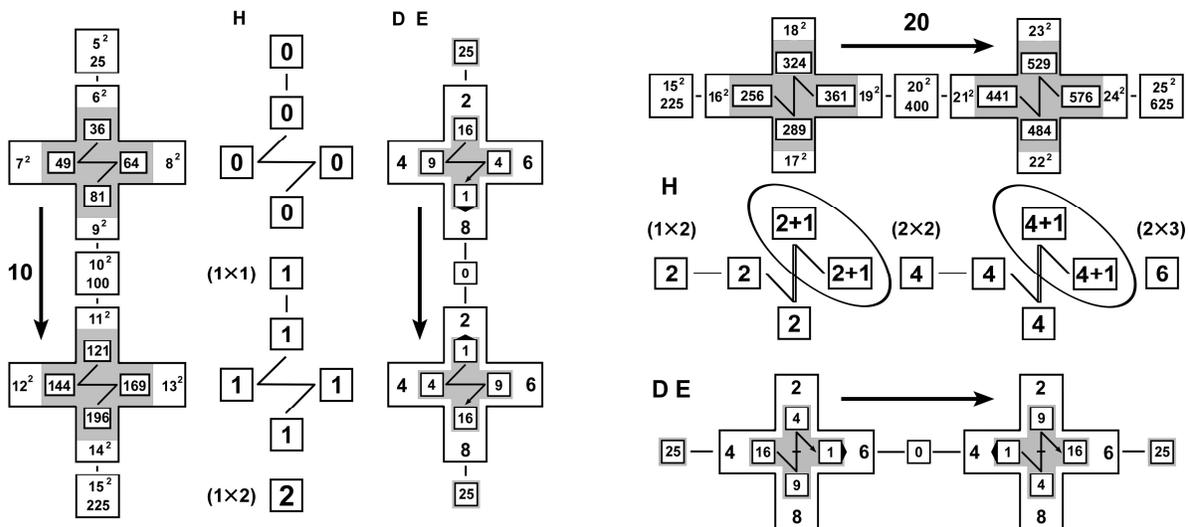


Рис. 1. Цифровые вертушки для квадратов чисел в диапазонах 5 - 15 и 15 - 25

Полагаем, что пропеллер прозрачен и не загораживает основную плоскость. Изображение на плоскости пропеллера содержит крестообразные фигуры, проектирующиеся на Т-матрицы основы. *Планки креста* (или, в другой терминологии, *радиальные лучи*) пронумерованы. На концах планок написаны числа, равные квадратам номеров: 1^2 , 2^2 , 3^2 , 4^2 . Если располагаться в центре крестообразного пропеллера, тогда *вперед* на начальном луче видим число 1, *слева* на второй планке креста написано число 4, *справа* третий радиальный луч указывает на 9, и *позади* нас на планке с номером 4 находится число 16. Дальней от центра точке вне креста приписано число $5^2=25$. Отметим,

что на пропеллере планка креста с номером 1 всегда направлена на центральную точку ЦВ.

Ломаная линия, проходящая по чётным цифрам Т-матрицы 2→4→6→8, называется *чётной молнией*. При повороте прозрачной плоскости пропеллера на прямые углы фигуры молний проектируются с пропеллера на соответствующие Т-матрицы. Чётная цифра на Т-матрице, с которой начинается молния, называется *номером молнии*. Итак, 2-я молния начинается на числе 2, молния №4 – начинается на числе 4 и т. д.

Математическая модель ЦВ. Пусть С является двузначным множителем. Найдем для С ближайший полный десяток 10N так, чтобы расстояние от С до 10N не превосходило 5. Представим двузначный множитель с помощью базового числа 10N в цифровой записи $C=[N;A]$, где абсолютная величина в разряде единиц $|A| \leq 5$. Здесь А может быть отрицательным числом, например,

$$17 = 20 - 3 = [2; (-3)]; \quad 18 = 20 - 2 = [2; (-2)]; \quad 27 = 30 - 3 = [3; (-3)].$$

Такую процедуру можно назвать *приведением множителя к базовому десятку*. Цифровая запись квадрата числа выражается формулой:

$$C^2 = [N; A]^2 = [H; D; E] = [(N^2); (2NA); (A^2)], \quad \text{где } A^2 \leq 25.$$

При возведении числа С в квадрат легко рассчитывается в уме разряд сотен $H=N^2$. Внимание человека-вычислителя концентрируется на вычислении десятков $D=2NA$. *Пифагоровы единицы* $E=A^2$ добавляются на стадии нормализации числового результата при переносе «лишних» десятков в старшие разряды (см. [3]).

Алгоритм применения цифровой вертушки. Линия молнии, проведенная на пропеллере, позволяет прочесть пары совпадающих чисел на основе и пропеллере. На основной плоскости указываются цифры десятков D искомого квадрата числа. На пропеллере читаются величины разряда единиц E результата. (Заметим, что «лишние» десятки из разряда единиц могут увеличить указанную на вертушке цифру десятков D).

Предварительный этап. Определяем ближайший к числу C полный десяток $10N$. Приводим C к базе, получаем $[N; A]$, где $-5 \leq A \leq 5$. Выделяем диапазон, в котором находится исходное число:

- менее ($10N$), т.е. от $[(N-1); 5]$ до $[N; 0]$,
- более ($10N$), т.е. от $[N; 0]$ до $[N; 5]$.

В левой точке каждого отмеченного диапазона значение C^2 равно:

$$(10N - 5)^2 = [(N - 1)N; 2; 5] \quad \text{или} \quad (10N)^2 = 100N^2 = [N^2; 0; 0].$$

Находим номер молнии ($2N$). Строим от числа ($2N$) на Т-матрице линию молнии, поворачивая пропеллер так, чтобы молния начиналась в точке ($2N$). По виду этой молнии определяем, какое положение поворота цифровой вертушки нужно для расчётов, вертикальное (если $N \in \{1, 4, 6, 9\}$) или горизонтальное (если $N \in \{2, 3, 7, 8\}$).

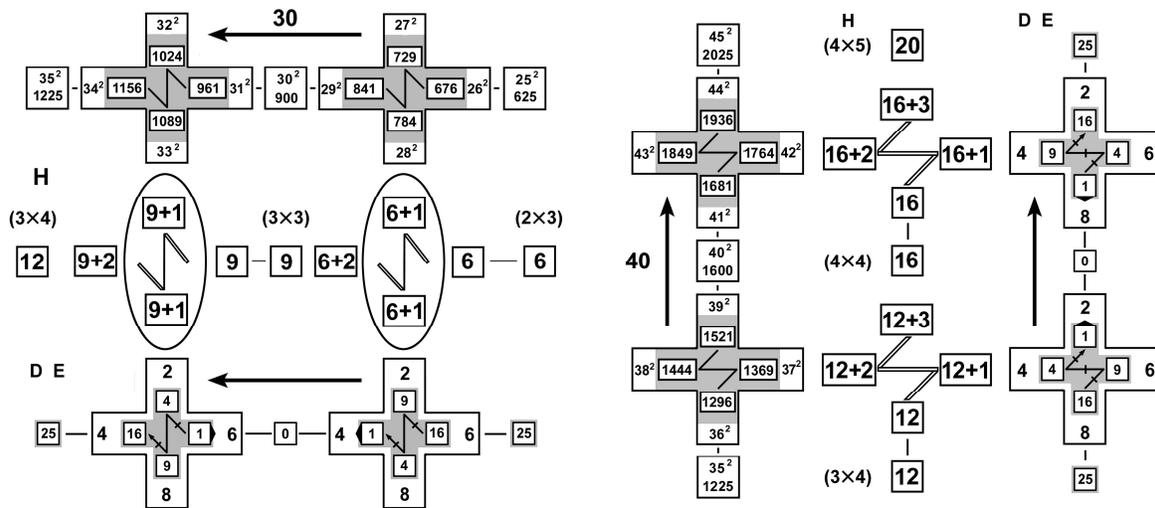


Рис. 2. Цифровые вертушки для квадратов чисел в диапазонах 25 - 35 и 35 - 45

Главное направление перемещения показано длинной стрелкой. В случае $N \in \{1; 6\}$ двигаемся по молнии Т-матрицы в общем направлении *сверху вниз* (\downarrow). Для базового числа $N \in \{2; 7\}$ главное направление смещения фишки – *слева направо* (\rightarrow) (см. рис. 1). Если $N \in \{3; 8\}$, тогда смещаемся в главном направлении *справа налево* (\leftarrow). Наконец, для $N \in \{4; 9\}$ главное направление ведёт *снизу вверх* (\uparrow) (см. рис. 2).

Вычисление начинаем с левого края выбранного диапазона. Последовательно пройдем по узлам молнии на пропеллере, называя числовой результата для квадратов чисел $C^2, (C+1)^2, \dots, (C+4)^2$.

Пусть, для определённости, C находится слева от базового числа в диапазоне от $(10N - 5)$ до $(10N)$.

Шаг 0. Ставим фишку на левую крайнюю точку диапазона, где значение $C^2 = (10N - 5)^2 = [(N-1)N; 0; (25)]$.

Например, $15^2 = [(1 \times 2); 0; (25)] = 225$, $25^2 = [(2 \times 3); 0; (25)] = 625$.

Шаг 1. Увеличиваем множитель C на единицу, перемещая фишку на один шаг по $(2N)$ -молнии. Попадаем внутрь T -матрицы на число $D=(2N)$. На той планке, на которой стоит фишка, читаем цифру единиц $E=16$. Составляем ответ для C^2 по разрядам: сотни $H=(N-1)N$, десятки $D=(2N)$ – это цифра на T , единицы $E=16$ читаются на пропеллере.

Шаг 2. Сдвигаем фишку на один шаг по указателю молнии, увеличиваем C на 1. Если на указателе $(2N)$ -молнии есть *инверсия* (обращение порядка), тогда к величине сотен добавляем единицу: $H_{\text{новое}}=H_{\text{старое}}+1$. Проекция фишки на T -матрицу показывает цифру десятков D результата. Число на пропеллере под фишкой указывает цифру единиц $E=9$.

Дальнейшие шаги однотипны. Чтобы найти квадрат следующего числа C , перемещаем фишку по указателю молнии. Проверяем инверсию на текущем указателе молнии. Обнаружив инверсию, увеличиваем разряд сотен H на 1. Фишка на T -матрице подсказывает цифру десятков D . На планке пропеллера видим цифру единиц E .

Ответ $C^2 = [H; D; E]$. Конец алгоритма ♦.

Примеры. В диапазоне от 15 до 25 (рис. 1) база $N=2$. Берём молнию с номером $2N=4$. Главное направление перемещения фишки – *слева направо*. Отмеченные фишкой точки указывают цифру десятков D на T -матрице, цифра единиц E читается на крестообразном пропеллере.

C	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
H	2=1×2	2	2	2	2	4=2×2	4	4	4	4	6=2×3
D	0	4	8	12	16	0	4	8	12	16	0
E	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
C²	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625

Базовые числа $N=5$ (рис. 3) и $N=10$ создают ситуацию, в которой Т-матрицы не нужны, так как здесь $D \equiv 0$. Величину единиц E считываем с пропеллера. В интервале от 45 до 55 каждый шаг приводит к увеличению сотен на 1. Для диапазона от 95 до 105 каждый шаг увеличивает H на 2.

При $5 < N < 10$ берем молнию с номером $(2N-10)$, и на каждом шаге к разряду сотен результата добавляем еще одну единицу.

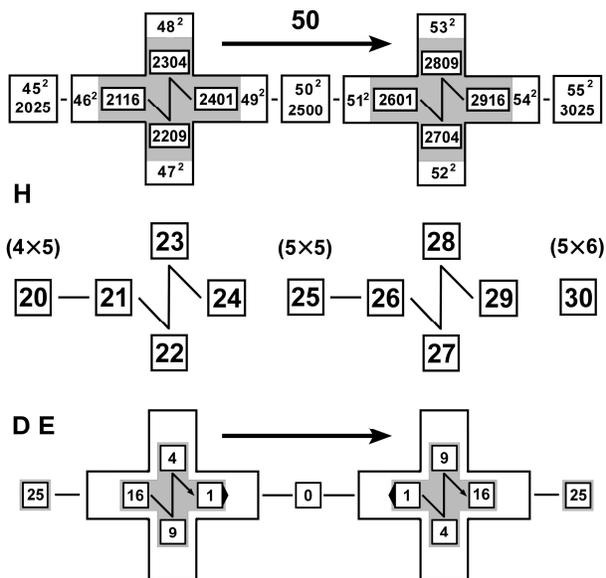


Рис. 3. Квадраты чисел в диапазоне 45 - 55

Литература.

1. В. Б. Творогов. Наглядная арифметика и технология быстрого счёта. Кн. 1: Основы. М.: Издательский дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 208 с. ил.
2. В. Б. Творогов. Цифровые вертушки для вычисления квадратов двузначных чисел, использующие телефонную Т-матрицу. Патент РФ №2432617, Бюллетень №30, 27.10.2011.
3. А.В. Творогов. Эффективный геометрический алгоритм вычисления квадратов чисел до 100. – Статья в настоящем сборнике.