Математическое и компьютерное моделирование в решении задач строительства, техники, управления и образования

XVII Международная научно-техническая конференция, Пенза, 2012

ISBN 978-5-94338-583-4

А. В. Творогов

МЕМО–ТОЧКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ В УСТНОМ СЧЁТЕ

Ссылка:
Творогов А. В. Мемо-точки и вычислительные формулы в устном счёте // Математическое и компьютерное моделирование в решении задач строительства, техники, управления и образования: сборник статей XVII международной научно-технической конференции / МНИЦ ПГСХА. – Пенза: ПГСХА, 2012 г. – с. 89–94.

МЕМО–ТОЧКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ В УСТНОМ СЧЁТЕ

А. В. Творогов

Московский государственный технический университет МИРЭА,

г. Москва, Россия

Каким минимальным объемом знаний нужно воспользоваться, чтобы уверенно умножать в уме двузначные числа? Обычно, требования к памяти ограничиваются примерами умножения однозначных чисел. Кроме непосредственного запоминания результатов можно применить цифровое правило. Полезно правило умножения $A\times10$: *приписать нуль справа от* A. Теперь результаты $2\times10=20$, $3\times10=30$, …, вычисляются моментально. При умножении на 9 можно применить расчёт $A\times9=A\times(10-1)=A\times10-A$. Цифровое правило позволяет сразу же вычислить десятки D и единицы E произведения $D(A\times9)=A-1$ и $E(A\times9)=10-A$. Цифровые правила позволяют выполнять умножение быстрее и проще.

В таблице умножения однозначных чисел произведения старших множителей $A\times B=[D;E]$, каждый из которых более 5, можно получить, зная произведение дополнительных множителей $A^*\times B^*$ менее 5, где дополнения $A^*=10-A$ и $B^*=10-B$. Расчёт $A\times B$ ведётся отдельно для десятков и единиц

$$D = A+B-10 \quad (\text{или} \quad D = A-B^* = B-A^*) \quad \text{и} \quad E = A^*\times B^*.$$

Теперь примеры таблицы умножения можно решать так:

$$8\times8 = [(8-8^*); (8^*\times8^*)] = [(8-2); (2\times2)] = 64;$$

$$7\times8 = [(7-8^*); (7^*\times8^*)] = [(7-2); (3\times2)] = 56;$$

$$7\times7 = [(7-7^*); (7^*\times7^*)] = [(7-3); (3\times3)] = 49.$$

Казалось бы, имеется альтернатива – запомнить результаты отдельных примеров или запомнить цифровое правило и каждый раз применять его при подсчётах. На самом деле, в современной технологии счёта рекомендуется *запоминать и числовые результаты умножения, и цифровые правила*.

Советы о том, какую часть таблицы умножения двузначных чисел нужно запоминать, различаются у разных педагогов. Те примеры умножения, для которых человек помнит результаты, назовем *мемо-множеством*. Трудоёмкие занятия с непосредственным заучиванием таблицы умножения до 100×100 не имеют смысла. Вне мемо-множества остальные задачи умножения приходится решать либо с помощью специального цифрового правила, или каким-то общим методом, скажем, умножая «крестиком».

Сложность умножения двузначных чисел растёт с величиной множителей. Приходится не только проводить расчёты в уме, но и запоминать промежуточные результаты. Для упрощения расчётов существуют специальные методы. Мы рассмотрим класс алгоритмов, основанных на *пифагоровых схемах* [1], для умножения в уме двузначных чисел [M;A]×[N;B]. Визуализация расчётов на пифагоровых схемах позволяет упростить арифметические расчёты и выполнять их с высокой скоростью.

Подготовка. Приведём двузначные множители к базовым числам 10M и 10N. Для этого представим множители в виде (10M+A) и (10N+B), где A и B принимают значения в диапазоне {-5; -4; …, 4; 5}. Произведение ищем в виде [M;A]×[N;B]=[***T;H;D;E***].

Этап 1. Разряды тысяч и сотен [***T;H***] = M×N. Поэтому ***D***=10×M×N.

Этап 2. Приращение десятков равно ***D***=M×B+N×A. Величина ***D*** называется *пифагоровыми десятками*, Здесь ***D*** может быть отрицательной величиной.

Этап 3. К полученной величине добавляются (или вычитаются) пифагоровы единицы ***E***=A×B.

В символьной записи чисел по разрядам [***T;H;D;E***] допускаются любые числовые значения величин, которые в окончательном результате должны быть нормализованы переносом лишних старших разрядов.

Отметим особенности метода пифагоровых схем.

(1) Единицы не превосходят по абсолютной величине 25.

(2) Все расчёты имеют геометрическую интерпретацию, они демонстрируются на фрагментах квадратной таблицы умножения Пифагора с центром в базовых множителях {(10M);(10N)}.

(3) Варианты в последовательности вычислений можно показывать маршрутами перехода по точкам пиф-схемы от базовых множителей до финишной точки исходных множителей [M;A]×[N;B].

Сложность решения арифметической задачи существенно уменьшится, если мы помним результат для какого-то выделенного примера (мемо-точки), близкого к решаемому примеру. *Мемо-точками* будем называть специально выбранные пары множителей, для которых мы запомнили произведение, или можем получить его за один шаг расчётов по формулам сокращенного умножения.

Простые правила сокращенного умножения. «*Мемо-точки* ±**5**».

Полные десятки 10M×10N = [(**M×N**); 0; 0].

Умножение на число, оканчивающееся на 5:

[M;5] × [N;0] = [(**M×N + N/2**); 0; 0].

[M;5] × [N;B] = [(**M×N + N/2); (M×B + B/2); 0**].

Здесь, по определению, [(1/2); 0; 0] = [5; 0] = 50, [(1/2); 0] = 5.

Примеры. 15×90 = [(1×9 + 9/2); 0; 0] = (9+4+1/2)×100 = 1350.

35×62 = [(3×6 + 6/2); (3×2 + 2/2); 0] = (18+3)×100 + (6+1)×10 = 2170.

45×73 = [(4×7 + 7/2); (4×3 + 3/2); 0] = [(31+1/2); (13+1/2); 0] =

= [31; (13+5); 5] = [(31+1); 8; 5] =3285.

Оба множителя оканчиваются на 5, тогда *сотни равны произведению с полусуммой*

[M;5] × [N;5] = [(**M×N + (M + N)/2**); 2; 5].

Примеры. 25×45 = [(2×4 + (2+4)/2); 2; 5] = (8+3)×100 + 25 = 1125.

35×45 = [(3×4 + (3+4)/2); 2; 5] = (12+3)×100 + 50 + 25 = 1575.

Если числа M и N близки между собой, удобна формула, в которой *сотни равны произведению с увеличенной базой и добавленной полуразностью*,

$$[M;5] \times [N;5] = [\ (\mathbf{M\times(N+1) + (N - M)/2});\ \ 2;\ \ 5].$$

Пример. $35\times45 = [(3\times(4+1) + (4–3)/2); 2; 5] = [(15 + 1/2); 2; 5] = 1575$.

«*Мемо-точки ±**3***». Заметное повышение эффективности счёта можно достичь, если запомнить результаты умножения *в точках ±3 от базовых полных десятков*. Общие формулы показывают способ расчёта в окрестности базовых десятков (10M; 10N):

$$[M; 3] \times [N; 3] = [\ (M\times N);\ 3(M+N);\ (3\times3)\ ];$$

$$[M; (–3)] \times [N; (–3)] = [\ (M\times N);\ (–3)(M+N); (–3)\times(–3)\ ];$$

$$[M; 3] \times [N; (–3)] = [\ (M\times N);\ 3(N – M);\ 3\times(–3)\ ];$$

$$[M; (–3)] \times [N; 3] = [\ (M\times N);\ 3(M – N);\ 3\times(–3)\ ].$$

На практике общие буквенные формулы применяются редко. Тренировки в решении примеров умножения нужно проводить отдельно для каждого конкретного диапазона базовых множителей. Покажем способ использования «мемо-точек ±3» для множителей в окрестности базы 30×30=900, где ***D***(30×30)=90. Выделенными множителями являются 27, 30, 33 (рис.1). Пары выделенных чисел образуют мемо-точки {27×27; 27×30; 27×33; 30×27; 30×30; 30×33; 33×27; 33×30; 33×33}. Смещение на схеме на один шаг вниз или направо увеличивает величину десятков D на 3. Приращение при движении по главной диагонали (3+3=6). Три шага смещения по диагонали дадут прирост (или уменьшение) D на 3×6=18. В мемо-точках величины десятков

$$D(27\times27)= D(30\times30)–18 = 90 – 18 = 72 \quad \text{и} \quad D(33\times33)= D(30\times30)+18 = 108.$$

Пифагоровы десятки ***D*** в мемо-точках 27×27 и 33×33 отличаются от базы 90 на ±18. Расчёт результатов выполняется за один шаг, так как пиф-единицы $\boldsymbol{E} = 3\times3 = (–3)\times(–3) = 9$ или $\boldsymbol{E} = 3\times(–3) = –9$

$$27\times27 = [(90 – 6\times3);\ \boldsymbol{E}] = [\mathbf{72}; \boldsymbol{E}] = [72; (3\times3)] = 729.$$

$$33\times33 = [(90 + 6\times3);\ \boldsymbol{E}] = [\mathbf{108};\ \boldsymbol{E}] = [108;\ (3\times3)] = 1089.$$

Пифагоровы единицы определяются как площади прямоугольников. Таблица пифагоровых единиц состоит из 4-х частей: Max и Min, где смещения множителей от базы имеют одинаковые знаки, и Mix разнонаправленных смещений. Известные в мемо-точках пиф-десятки ***D***, позволяют узнать результаты в соседних точках. Расчёт 28×27 с мемо-точкой 27×27=726 выполняется увеличением пифагорова десятка 72 на +3:

$$28\times27=[(72 + 3);\ \boldsymbol{E}] = [75;\ (8^*\times7^*)] = [75;\ (2\times3)] = 756, \quad \text{здесь } \boldsymbol{E}>0.$$

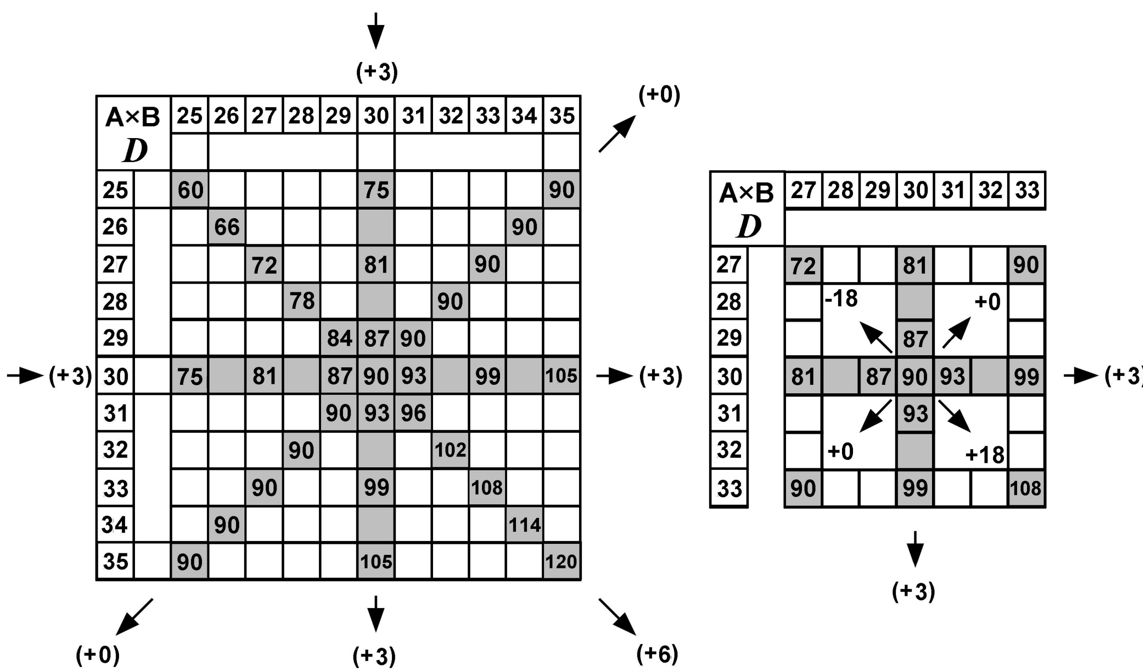

Рис. Схема пифагоровых десятков в окрестности базы 30×30.

Расчёт примера 29×26 с мемо-точкой 30×25 = **75**0 (шаг направо вверх)

$$29\times26=[(75 + 0);\ \boldsymbol{E}] = [75;\ (1\times4)] = 754, \quad \text{здесь } \boldsymbol{E}>0.$$

На схеме десятков (рис.) с базой 30×30 движение вдоль поперечной диагонали не меняет пифагоровых десятков. Мемо-точка 27×33 рассчитывается как разность квадратов, здесь ***D***=90, пифагоровы единицы ***E***=(–9) отрицательны:

$$27\times33 = [(90 + 0);\ \boldsymbol{E}] = [90;\ (-3)\times3)] = 900 - 9 = 891.$$

Соседние примеры решаются коррекцией величины ***D***(27×33)=90:

$28\times34 = [(90 + 3 + 3); \boldsymbol{E}] = [96; (-2)\times4)] = 960 - 8 = 952$,   здесь $\boldsymbol{E} < 0$.

Таким образом, умножение чисел, близких к мемо-точкам, сводится к элементарному сложению (или вычитанию) в разряде десятков.

Подсчитаем количество пар множителей, которые можно достичь за один шаг (элементарный шаг счёта), двигаясь от «мемо-точек ±**5**» по координатным линиям или по диагонали. Пусть M≠N. В центре пифагоровой схемы размера 11×11 вокруг базовых множителей (10M;10N) достижимы 8 точек. Угловая точка и её соседи дают 4 ячейки. Из точек на серединах сторон, где (10M±5) или (10N±5) достигаем ещё 5 пар. Итого 9+4×4+4×6=49, что составляет 49/121=40,5% от общего числа.

Если в нашем мемо-множестве имеются одновременно и «мемо-точки ±**5**», и «мемо-точки ±**3**», тогда к зоне охвата следует добавить еще 8 квадратов 3×3 вокруг «мемо-точек ±**3**». Некоторые окрестности имеют непустое перекрытие. Вне одношаговой доступности останутся только 16 результатов по краям, для которых один множитель оканчивается на 5. За один шаг от мемо-точек можно достичь 105/121=86,8% всех пар множителей пиф-схемы.

Практический вывод состоит в том, что запоминание «мемо-точек ±**3**» для многих ситуаций превращает умножение двузначных чисел в элементарное одношаговое действие. Допускаются, конечно, и любые другие мемо-точки (полезно запомнить, что 32×32=1024, 77×13=1001 и т.д.).

Литература

1. Творогов А. В. Умножение как геометрическое отображение пространства множителей в пространство решений. – Статья в наст. сборнике.