Математическое и компьютерное моделирование в решении задач строительства, техники, управления и образования

XVII Международная научно-техническая конференция, Пенза, 2012

ISBN 978-5-94338-583-4

А. В. Творогов

УМНОЖЕНИЕ КАК ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА МНОЖИТЕЛЕЙ В ПРОСТРАНСТВО РЕШЕНИЙ

Ссылка:

Творогов А. В. Умножение как геометрическое отображение пространства множителей в пространство решений // Математическое и компьютерное моделирование в решении задач строительства, техники, управления и образования: сборник статей XVII международной научно-технической конференции / МНИЦ ПГСХА. – Пенза: ПГСХА, 2012 г. – с. 98–104.

УМНОЖЕНИЕ КАК ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА МНОЖИТЕЛЕЙ В ПРОСТРАНСТВО РЕШЕНИЙ

А. В. Творогов

МГТУ радиотехники, электроники и автоматики МИРЭА,

г. Москва, Россия

В нашей традиционной технологии счёта исходные числовые данные и результаты записываются в десятичной системе счисления. Выполняя элементарные числовые преобразования в уме, человек использует некоторые визуальные образы, помогающие счёту. Например, «5 плюс 1» можно представить на картинке как добавление метки к множеству из пяти меток.

Рассмотрим проблему представления в наглядном геометрическом виде результатов умножения однозначных и двузначных чисел. Величину одного множителя можно указать точкой на числовой линии. Два множителя можно показать точкой на плоскости, на двух координатах которой отмечены натуральные числа. Такое очевидное построение используется со времен Пифагора уже 2500 лет. Впервые в письменных источниках таблица умножения в форме квадрата 10×10 появилась в книге Никомаха (3 век до н.э.), который утверждал, что такую таблицу использовал Пифагор (570-ок.500 г. до н.э.). Ячейки таблицы Пифагора содержат произведения номера строки на номер столбца. Для множителей A×B=[D;E], где D – цифра десятков, E – цифра единиц, произведение [D;E] равно числу единичных квадратиков в прямоугольнике со сторонами A и B.

Пару множителей X×Y можно рассматривать как точку в *пространстве множителей*. Геометрическое пространство, в котором числовые результаты указываются как точки, которым приписаны числа, будем называть *пространством решений*. В соглашении (стандарте) о представлении чисел точками должен быть сформулирован способ нумерации выделенных точек. Например, произведения A×B=[D;E], в которых фиксирован множитель A, можно расположить на числовой линии, меняя множитель B.

В наглядной арифметике [1] построены специальные пространства решений на телефонной T-матрице. Они позволяют визуализировать вычисления и явно указать геометрический переход от множителей к цифрам результатов. Геометрическое построение превращается в метод вычисления.

Чтобы наглядно показать результаты умножения двузначных чисел [M;A]×[N;B]=[T;H;D;E], требуется каким-то способом указывать цифры в разрядах тысяч T, сотен H, десятков D и единиц E. Структура пространства решений должна соответствовать возможностям визуального воображения обычного человека. Наша цель состоит в том, чтобы разбить многопараметрическую задачу умножения двузначных множителей [M;A]×[N;B] на элементарные шаги. Мы построим геометрические пространства решений для отдельных разрядов (сотен, десятков, единиц), основываясь на *пифагоровых схемах* [2], структура которых подсказана таблицей умножения Пифагора.

Важное требование к пространству решений состоит в том, что оно должно *визуализировать все этапы* умножения двузначных чисел, показывать результаты расчётов отдельных разрядов: единиц, десятков, сотен, тысяч. Заметим, что таблица умножения Пифагора не обладает свойствами пространства решений. Выполняя алгоритм Евклида (умножение «крестиком»), на некотором шаге мы получим промежуточный результат, который не является произведением двух натуральных чисел (полученных из цифр множителей). Только завершение нескольких умножений и сложений даст результат, равный произведению X×Y, и это число можно показать в таблице Пифагора. Так, умножая 34×21 по разрядам, получим 30×20=600, 34×20=680. Следующий шаг вычисления десятков 68+3×1=71 не имеет эквивалента в таблице Пифагора. Добавление единиц 710+4×1=714 опять возвращает нас в пространство таблицы Пифагора, где имеется соответствующая точка 34×21=714.

Решая арифметический пример умножения, мы переходим из плоского 2D пространства множителей в *пространство решений*, где числовые ответы явно зафиксированы. Задача человека-вычислителя состоит в том, чтобы прочитать с визуальных схем нужные числа, используя соглашения о принятом стандарте соответствия геометрических элементов и величин чисел. В геометрическом пространстве решений человек в своем воображении *одновременно представляет числовые результаты нескольких близких примеров*.

Пространство единиц Е в пифагоровой схеме представим квадратной таблицей 5×5. Для множителей менее 5 результат умножения А×В будем представлять себе как прямоугольник со сторонами А и В, в котором число ячеек равно числу Е. Вместо однозначного числа в разряд единиц Е будем записывать величины, значения которых лежат в пределах от -25 до +25. Эти числа записаны в начале таблицы Пифагора. Будем называть их *пифагоровыми единицами* (рис. 1).

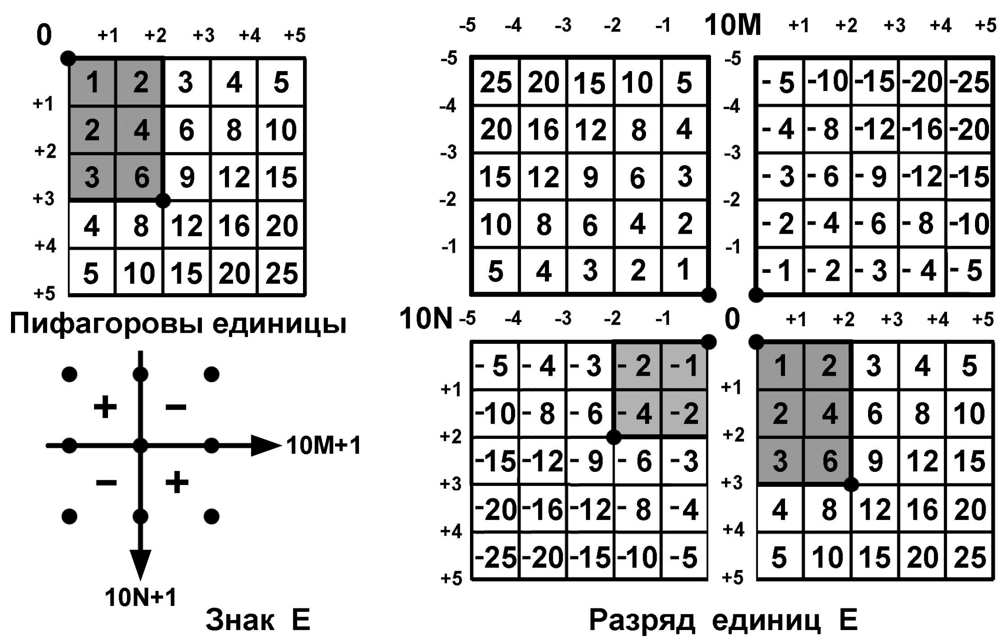


Рис. 1. Пространство решений для единиц на пифагоровых схемах

В методе пиф-схем перед началом вычислений множители приводятся к базовым полным десяткам, т.е. (10·M+A)×(10·N+B), где величины A и B находятся в пределах от (–5) до (+5). Ответ ищем в виде [***T;H***;***D***;***E***].

Произведение базовых десятков M и N даёт оценку тысяч и сотен M×N=[***T;H***]. Величину *пифагоровых десятков* вычисляем, как сумму M×B+N×A=[***H′;D′***]. *Пифагоровы единицы* ***E***=A×B (площадь прямоугольника) могут быть как положительными, так или отрицательными.

В геометрическом пространстве решений, построенном на основе таблицы Пифагора, каждый промежуточный шаг вычисления можно показать маршрутом перемещения от базового числа до точки, указанной множителями. На рис. 2 показаны геометрические способы подсчёта в окрестности базовых чисел 20×20 и 30×30. Приращения пифагоровых десятков ***D*** показаны метками (+1) и антиметками (–1), нарисованными около координатных линий. Величина ***D*** равна числу меток вдоль маршрута до множителей. На рис. 2 показаны детали счёта 17×18, 22×23, 27×28, 32×33.

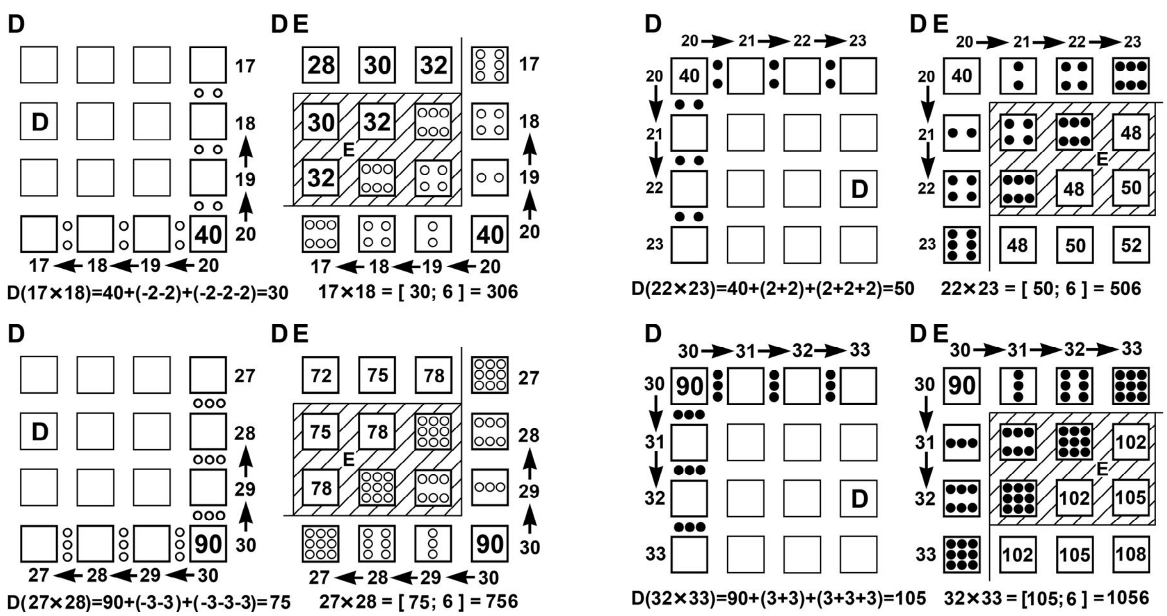


Рис. 2. Пространство решений [***D;E***] в окрестностях 20×20 и 30×30

Пространство десятков в начале расчётов представляет собой плоскость с пустыми квадратиками. Для множителей 20×20 базовое число десятков ***D***(20×20)=40. Каждый шаг в соседний квадрат изменяет величину десятков *D* на 2. Сложение (+2) или (–2) выполняется в уме. Геометрическое решение (рис.2) можно записать цифровыми поразрядными действиями, например,

$17\times18 = [(40+(-2-2)+(-2-2-2);\ (17-20)\times(18-20)] = [(40-10);\ (3\times2)] = 306;$

$22\times23 = [(40+(2+2)+(2+2+2);\ (22-20)\times(23-20)] = [(40+10);\ (3\times2)] = 506.$

Для базы 30×30 имеем десятки $\boldsymbol{D}(30\times30)=90$. Здесь каждый шаг изменения множителя на 1 приводит к изменению пифагоровых десятков $\boldsymbol{D}=90$ на 3.

$27\times28 = [(90+(-3-3)+(-3-3-3);\ (27-30)\times(28-30)] = [(90-15);\ (3\times2)] = 756;$

$32\times33 = [(90+(3+3)+(3+3+3);\ (32-30)\times(33-30)] = [(90+15);\ (3\times2)] = 1056.$

Пространство множителей, пространство десятков и пространство единиц в методе пифагоровых схем имеют одинаковую координатную структуру. В ходе расчётов человек вычислитель представляет одну координатную сетку множителей, на которую проектируются соответствующие пространства решений. Сквозь эту координатную сетку рассматриваем расположенные за ней плоскости десятков и единиц.

Последовательность этапов визуальных вычислений следующая.

(Шаг 1). Тысячи и сотни вычисляем как произведение $[\boldsymbol{T;H}]=M\times N$.

(Шаг 2). Отмечаем базовые множители 10M (ось по вертикали) и 10N (ось по горизонтали). Для удобства предполагаем, что M<N, т.е. заполняется правая верхняя часть таблицы Пифагора. Определяем точку для первого множителя (10M+A), где число A может быть отрицательно. Если A>0, первая координата находится ниже базы 10M.

Находим координату для второго множителя (10N+B), где B может быть отрицательно. Если B>0, тогда точка находится правее базы 10N.

(Шаг 3) Двигаемся на B шагов направо (если B>0), подсчитывая $\boldsymbol{D}$. Каждый шаг добавляет (+M). (Если B<0, перемещаемся налево, вычитая M). На рис.2 величины M=2 и M=3 представлены парами и тройками меток, облегчая визуальный счёт.

(Шаг 4) Двигаемся на A шагов вниз (если A>0), подсчитывая $\boldsymbol{D}$. Каждый шаг добавляет (+N). (Если A<0, перемещаемся вверх). Теперь мы находимся в конечной точке множителей (10M+A)×(10N+B) и получена величина $[\boldsymbol{T;H;D}]$.

(Шаг 5) Добавляем величину пифагоровых единиц $\boldsymbol{E}$=A×B, заданных смещениями A и B, причём $\boldsymbol{E}$ может быть меньше нуля.

Случай M=N будем называть *симметричной базой*. Пример умножения с симметричной базой M=N решается проще, если сначала подсчитать шаги по координатам. Обозначим X – первый множитель, Y – второй множитель. Величину разности $\mathbf{S_B}$=Y–10×N между множителем Y и базой 10N назовём *смещением множителя*. *Пифагоровы десятки равны первому множителю X с добавленным смещением второго множителя* $\mathbf{S_B}$ (со знаком), *умноженным на коэффициент базы* M,

$$\boldsymbol{D} = \mathbf{M \times (X + S_B).}$$

К пифагоровым десяткам добавляем пифагоровы единицы $\boldsymbol{E}$=A×B.

Пример **22×23**. $\mathbf{S_B}$=23–20=3. $\boldsymbol{D}$(22×23)=2×(22+3)=2×25=50. $\boldsymbol{E}$=2×3=6.

22×23 = [$\boldsymbol{D}$; $\boldsymbol{E}$] = [50; 6] = 506.

В примерах с разными базовыми числами M и N имеется несколько вариантов расчётов. Рассмотрим пример **17×32**. Выберем базу 20×30. Тогда решение по методу пифагоровых схем имеет вид

17×32 = [2;(-3)] ×[3;2] = [(2×3); (2×2–3×3); (–3)×2] = [6; (–5); (–6)] = 544.

Сравним эти расчёты с пиф-схемой с симметричной базой 20×20. Смещение второго множителя S_B=32–20=12. Пифагоровы десятки $\boldsymbol{D}$ и пифагоровы единицы $\boldsymbol{E}$

$\boldsymbol{D}$ = 2×(17+12) = 2×29 = 2×(30–1) = 60 – 2 = 58. $\boldsymbol{E}$ = (–3)×12 = –36.

17×32 = [$\boldsymbol{D}$; $\boldsymbol{E}$] = [(58); (–36)] = [5; (8–3); (–6)] = 550 – 6 = 544.

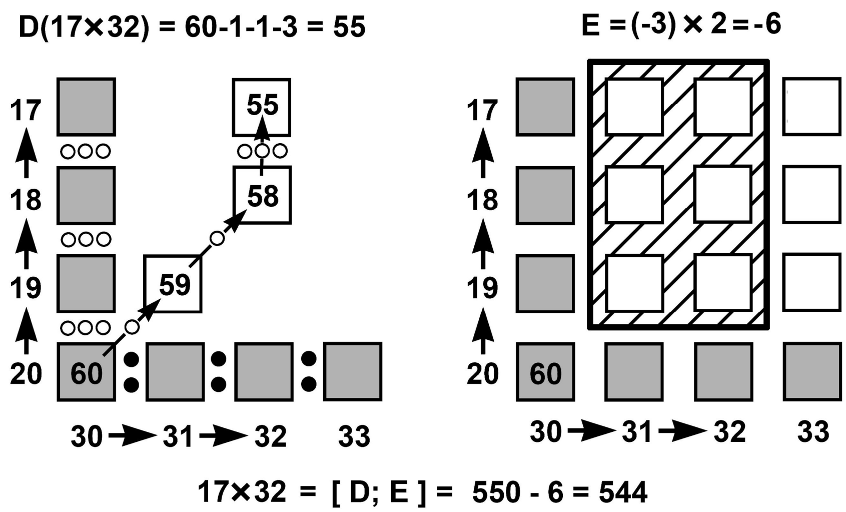
Выбор симметричной базы 30×30 даёт смещение S_B=32–30=2. Пифагоровы десятки $\boldsymbol{D}$ и пифагоровы единицы $\boldsymbol{E}$ для базы 30×30 равны

$\boldsymbol{D}$ = 3×(17+2) = 3×19 = 3×(20–1) = 60 – 3 = 57. $\boldsymbol{E}$ = (–13)×2 = –26.

17×32 = [$\boldsymbol{D}$; $\boldsymbol{E}$] = [(57); (–26)] = [5; (7–2); (–6)] = 550 – 6 = 544.

Вариант счёта с симметричной базой 20×20 оказывается чуть проще.

Покажем геометрическое решение примера **17×32** с базой 20×30. В начальной точке пифагоровы десятки $\boldsymbol{D}$(20×30)=60. Следующий шаг расчётов ведёт к точке 20×32, где ***D***(20×32)=60+2×2=64. Переход к точке 17×32 приводит к уменьшению десятков ***D***(17×32)=64–3×3=55. Отметив возникшие пары множителей, получим «маршрут вычисления» (20×30)→(20×32)→(17×32), в котором есть <u>перемещения по горизонтали или вертикали</u>.



У пифагоровых схем есть преимущество в том, что можно вычислять десятки ***D***, <u>перемещаясь по диагонали</u>. Сделаем два шага от базы ***D***(20×30)=60 <u>направо вверх</u> (рис.3). Каждый такой диагональный шаг направо вверх приведёт к уменьшению величины десятков на (3–2)=1

$$\boldsymbol{D}(18\times32) = \boldsymbol{D}(20\times30) - 1 - 1 = 60 - 2 = 58.$$

Переместимся на один шаг вверх, уменьшая ***D*** на 3, добавим ***E***=(–3)×2=–6:

$$\boldsymbol{D}(17\times32) = \boldsymbol{D}(18\times32) - 3 = 58 - 3 = 55, \qquad 17\times32 = [\boldsymbol{D}; \boldsymbol{E}] = 550 - 6 = 544.$$

При поиске алгоритма расчёта с минимальной трудностью нельзя игнорировать маршруты с диагональными перемещениями по пространству множителей, они могут подсказать самый удачный способ вычисления.

Литература

1. Творогов В. Б. Наглядная арифметика и технология быстрого счёта. Книга 1: Основы. М.: Издательский дом «ЛИБРОКОМ», 2011 – 208 с. ил.

2. Творогов А. В. Визуализация устных вычислений с помощью пифагоровых схем //Современные технологии в системе образования: II МНПК / МНИЦ – Пенза: ПГСХА, 2012 г.- с.113-118.