

**Философия отечественного образования:
История и современность**

X Всероссийская научно-практическая
конференция, Пенза, 2013.



А. В. Творогов

ОБ ИДЕАЛЬНОМ ФОРМАТЕ ТАБЛИЦЫ УМНОЖЕНИЯ

Ссылка:

Творогов А. В. Об идеальном формате таблицы умножения. // Философия отечественного образования: история и современность. Сборник статей IX Всероссийской научно-практической конференции / МНИЦ ПГСХА. – Пенза: 2013. – 153-157 с.

ОБ ИДЕАЛЬНОМ ФОРМАТЕ ТАБЛИЦЫ УМНОЖЕНИЯ

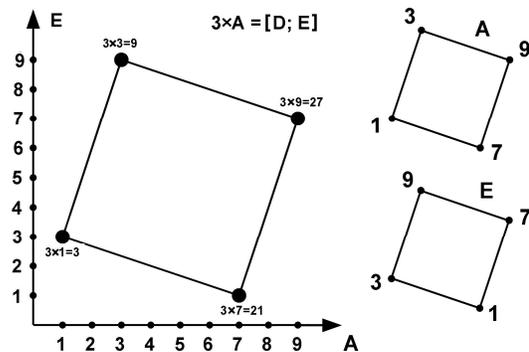
А. В. Творогов

Московский государственный технический университет МИРЭА

В таблице умножения однозначных натуральных чисел от 1 до 9 количество числовых примеров $9 \times 9 = 81$. Лист умножения на нуль не представляет интереса. Привычным способом упорядочивания является таблица, известная со времен древнегреческого математика и философа Пифагора, в которой множители отмечают точки на осях координаты, а произведение $A \times B = [D; E]$ расположено на пересечении линий строки и столбца. Такой линейный формат не даёт подсказки о величине десятичных цифр D и E числового результата.

Есть ли возможность представить всю совокупность примеров умножения на плоскости в таком формате, чтобы определять цифры [D;E], по возможности, проще и быстрее? Для того чтобы действовал принцип «место расположения примера подсказывает результат умножения», необходимо заложить в структуру таблицы умножения те числовые законы, которые существуют в таблице умножения.

Рассмотрим примеры $3 \times A = [D; E]$. Подсказку о формате расположения примеров таблицы умножения можно получить, используя специальную плоскость с координатами $\{A; E\}$, где A – множитель, E – цифра единиц произведения. Отметим места



расположения карточек с примерами $\{3 \times 1 = 3; 3 \times 3 = 9; 3 \times 9 = 27; 3 \times 7 = 21\}$.

Множители $\{1; 3; 9; 7\}$ образуют циклическую группу вращения 4-го порядка

$$\{3^k \pmod{10}, \text{ где } k=0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Приписывая тем же точкам квадрата цифру единиц произведения $E(3 \times A)$, получим *пространство результатов* $\{3, 9, 7, 1\}$. Сравнивая нумерацию на вершинах квадратов, видим, что цифры единиц E произведений в пространстве результатов повернуты на прямой угол по отношению к цифрам в пространстве множителей A .

Проведём ещё один эксперимент. Пример $A \times B = [D; E]$ будем рассматривать как отображение $F_A : B \rightarrow E (A \times B)$. Фиксируем A . Для каждого числа B выполним несколько преобразований отображения F_A .

$$B \rightarrow E_1 (A \times B) \rightarrow E_2 (A \times E_1) \rightarrow E_3 (A \times E_2) \rightarrow \dots \rightarrow E_K (A \times E_{(K-1)}).$$

Через несколько шагов получим повторение цифр. Пусть $A=3$:

$$1 \rightarrow E (3 \times 1) = 3 \rightarrow E (3 \times 3) = 9 \rightarrow E (3 \times 9) = 7 \rightarrow E (3 \times 7) = 1, \quad (4 \text{ шага цикла})$$

$$2 \rightarrow E (3 \times 2) = 6 \rightarrow E (3 \times 6) = 8 \rightarrow E (3 \times 8) = 4 \rightarrow E (3 \times 4) = 2, \quad (4 \text{ шага цикла})$$

Цикл из четырех шагов по точкам $1 \rightarrow 3 \rightarrow 9 \rightarrow 7 (\rightarrow 1)$ отождествим с квадратом. Цикл чётных чисел ($A=3$) представляет собой другой квадрат $2 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 4$. Объединив четные и нечётные числа, получим T -матрицу. В пространстве, сохраняющем структуру T -матрицы, цифровые законы таблицы умножения имеют запоминающуюся геометрическую интерпретацию.

В наглядной арифметике [1] для отображения результатов используется *числовая линия* и *числовая плоскость*. На числовой линии величина, находящаяся правее, на единицу больше. На числовой плоскости горизонтали – это числовые линии, и каждый шаг вниз увеличивает число на 3. Частью числовой плоскости является телефонная T -матрица из трех строк и трех столбцов, в которой представлены однозначные числа.

Выделим примеры с одинаковым первым множителем, которые назовем *листами умножения*. Придадим листам умножения форму матрицы 3×3 . Возьмем примеры третьего листа умножения, составляющие множество $\{3 \times 1 = 3; 3 \times 3 = 9; 3 \times 9 = 27; 3 \times 7 = 21\}$. Отметив на T -матрице множители $\{1, 3, 9, 7\}$, получим квадрат. Единицы произведений $\{3, 9, 7, 1\}$ образуют тот же квадрат, повернутый на величину прямого угла.

Зададим новый формат таблицы умножения – девятилистник умножения. Пусть каждый лист умножения представляет собой T-матрицу. Структурное правило девятилистника требует, чтобы *карточка с примером $A \times B = [D; E]$ была размещена на листе A в ячейке E.*

Взаимное расположение разных листов умножения подсказано строением T-матрицы. Расположим четыре примера умножения $A \times 3$ с разных листов умножения $\{1 \times 3 = 3; 3 \times 3 = 9; 9 \times 3 = 27; 7 \times 3 = 21\}$ в *вершинах квадрата.* Места для чётных листов умножения отметим по закону линейности: лист 2 расположен между листами 1 и 3, лист 6 стоит между листами 3 и 9 и т.д. Примеры пятого листа умножения следовало бы разместить в двух ячейках 5 и 0, но для удобства чтения карточки примеров умножения $5 \times B$ рассредоточены.

На чётных листах умножения заняты только те ячейки T-матрицы, которые индексированы чётными числами, так как умножение на чётный множитель даёт чётную цифру единиц E произведения.

Девятилистник умножения впервые описан в публикации о патентах [2]. Геометрическая конструкция девятилистника – это не только математическая абстракция. Девятилистник умножения может представлять собой материальный механический объект – наглядное учебное пособие по арифметике. Применяя на девятилистнике цифровые правила умножения, мы получаем оригинальный инструмент счёта для умножения однозначных чисел.

Отметим некоторые важные свойства девятилистника умножения. Последовательный порядок чтения примеров на каждом листе умножения задаёт ломаная линия – молния T-матрицы. Первая цифра на молнии является её номером M_i . Обозначим буквой **R** *оператор поворота* молнии вокруг её центра на прямой угол по часовой стрелке. Тогда

$$M_3 = R (M_1), \quad M_9 = R (M_3), \quad M_7 = R (M_9), \quad M_1 = R (M_7).$$

Обозначим $R^k(A)$ поворот радиального луча числа A на T-матрице вокруг её центра на k прямых углов по часовой стрелке. Для отрицательного индекса $k=-1, k=-2$ и т.д. поворот выполняется против часовой стрелки.

Числа A и $A^*=10 - A$ называются *дополнительными* (до полного десятка). Операция дополнения устанавливает соответствие $A \rightarrow A^*$, которое на T -матрице является центральной симметрией. Пары множителей $A \times B$ и $A \times B^*$ называются *дополнительными*. Дополнительные множители на листе умножения A расположены центрально симметрично.

Пусть $E(A \times B) \neq 0$. Если в паре $A \times B$ заменить множитель B на дополнительное число B^* , тогда *единицы дополнительной пары $A \times B^*$ изменятся на дополнительное число*

$$E(A \times B^*) = E^*(A \times B).$$

Примеры. $E(2 \times 8) = E(2 \times 2^*) = E^*(2 \times 2) = 4^* = 10 - 4 = 6$.

$$E(3 \times 7) = E(3 \times 3^*) = E^*(3 \times 3) = 9^* = 10 - 9 = 1.$$

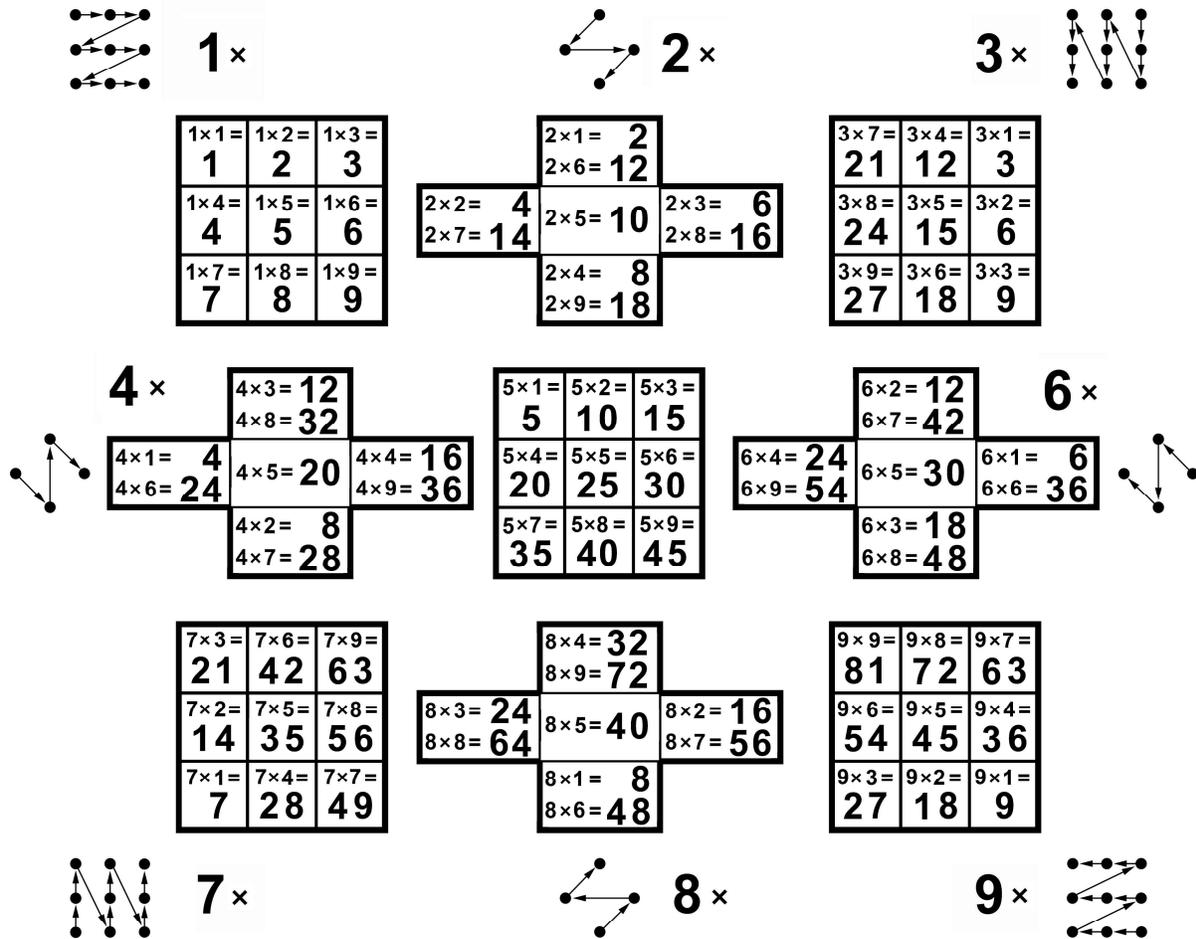


Рис. 2. Девятилистник умножения и молнии T -матрицы

Пары множителей $A \times B$ и $A^* \times B^*$ называются *симметричными*. Симметричные множители $A \times B$ и $A^* \times B^*$ расположены на девятилистнике центрально симметрично относительно примера $5 \times 5 = 25$.

Единицы симметричных пар множителей равны между собой

$$E(A^* \times B^*) = E(A \times B).$$

Примеры: $E(9 \times 9) = E(1^* \times 1^*) = E(1 \times 1) = 1.$

$$E(8 \times 8) = E(2^* \times 2^*) = E(2 \times 2) = 4.$$

Обозначим буквой **R** функцию поворота на T-матрице радиального луча на прямой угол по часовой стрелке. Девятилистник умножения демонстрирует геометрические цифровые законы для единиц

$$E(3 \times A) = R(A), \quad E(9 \times A) = R^2(A), \quad E(7 \times A) = R^{-1}(A).$$

Каждая из приведенных формул является цифровым правилом единиц для умножения на первый множитель. Сформулируем правило единиц для умножения на 3. Допустим, мы находимся в центре T-матрицы и смотрим на множитель B. Тогда цифра единиц $E(3 \times A)$ находится *справа* от нас. Чтобы получить цифру единиц $E(3 \times A)$, нужно повернуть радиальный луч множителя A на T-матрице на прямой угол по часовой стрелке. Правило умножения на 3 является *правилем правой руки*, так как поворот по часовой стрелке на прямой угол удобно показывать правой рукой. Соответственно, правило умножения на 7 является *правилем левой руки*. Чтобы не перепутать соответствия того, какая рука относится к какой цифре, достаточно, стоя в центре T-матрицы повернуться лицом к цифре 1. Тогда 3 будет видна *справа*, а цифра 7 окажется *слева* от начального луча зрения на цифру 1.

Пусть A является чётным числом. Тогда

$$E(6 \times A) = A, \quad E(2 \times A) = R^{-1}(A), \quad E(4 \times A) = R^2(A), \quad E(8 \times A) = R(A).$$

Эти формулы являются цифровыми правилами единиц для чётных множителей, использующими поворот луча на T-матрице. Легко проверить, что

$R^2(A) = A^*$. Можно записать $E(9 \times A) = R^2(A) = A^*$. Два поворота – это дополнение.

В известной линейной таблице умножения Пифагора невозможно показать геометрический поворот единиц от множителя к произведению. Замечательное свойство поворота единиц при умножении очевидно проявляется на геометрической структуре девятилистника. Данный факт даёт аргументы в пользу того, что формат девятилистник «более идеален», чем таблица Пифагора.

К отклонениям девятилистника от идеала можно отнести отсутствие нуля на T-матрице. Примеры умножения, кратные десяти $2 \times 5 = 10$, $4 \times 5 = 20$, $6 \times 5 = 30$, $8 \times 5 = 40$, приходится размещать или вне T-матрицы, или в центре чётных листов умножения на свободных местах. Пятый лист умножения должен состоять из двух ячеек $E=0$ и $E=5$, в каждой ячейке по несколько примеров. Для удобства чтения приходится раздвигать карточки с примерами умножения на 5, отказываясь от буквального следования правилу девятилистника.

Литература.

1. В. Б. Творогов. Наглядная арифметика и технология быстрого счёта. Книга 1: Основы. М.: Издательский дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 208 с. ил.
2. В. Б. Творогов. Способ обучения и модель таблицы умножения/деления на основе девяти матриц – девятилистника. – Патент РФ N 2139575. 10.10.1999, Бюл. N 28.