# МАГИЯ ЧИСЕЛ В НАУКЕ И ПРИРОДЕ

**Лоскович М.В., Натяганов В.Л., Слепова Т.В.**

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Биологический, механико-математический факультеты,
Россия, 119899, г. Москва, Воробьевы горы, МГУ, механико-математический факультет, кафедра газовой и волновой динамики,
тел.: (095) 939-37-54.

«Число есть сущность всех вещей и
организация Вселенной в ее определениях
представляет собой вообще гармоническую
систему чисел и их отношений.»
Пифагор (570 - 500 г. до н. э.)

По свидетельству косвенных источников именно Пифагор впервые разделил натуральные числа на четные (женские) и нечетные (мужские, кроме «чистой и глубокой единицы»), простые и составные (квадратные и прямоугольные); ввел понятия совершенного числа (если оно равно сумме всех своих правильных делителей: 6=1+2+3, 28=1+2+4+7+14, ...), пар дружественных чисел (если каждое их них равно сумме делителей другого: 220 и 284, 1184 и 1240, 2620 и 2964...) фигурных чисел и т. д.

Идея о связи гармонии природы с гармонией чисел достаточно точно выражена в эпиграфе. Ранние пифагорейцы считали, что в числовых закономерностях зашифрованы тайны мироздания и приписывали числам различные мистические свойства. Так, изучая музыкальные закономерности на специально изобретенном приборе - монохорде, Пифагор опытным путем открыл, что две струны совместно дают приятное звучание (консонанс), если их длины относятся как 1:2 (октава), 2:3 (квинта) или 3:4 (кварта). «Великой Тетраксис» называли пифагорейцы эту четверку чисел: 1,2,3 и 4, которая служила основой их теории гармоничной музыки. Если заметить, что сумма этих чисел равна 10, то становятся понятны их восторженные слова: «Благослови нас, о божественное число, породившее богов и людей! О святая Тетраксис! В тебе источник и корни вечно цветущей природы. Ибо это божественное число начинается чистой и глубокой единицей и достигает священной четвертки, затем оно порождает ... священную десятку, ключ ко всем вещам.»

Число 5=2+3 считалось символом любви и гармонии, как сумма двух первых чисел противоположного (женского и мужского) начала. Минимальное совершенное число 6=2•3, а число 7 олицетворяло жизнь. Причины этого не совсем ясны, но две тысячи лет спустя Лука Пачоли в своем учебном трактате «Сумма знаний по арифметике, алгебре, отношениям и пропорциональности» числу 7 отводит такую же роль.

Широкую известность Пачоли принес другой трактат «О божественной пропорции» (1509 г.), посвященный делению отрезка в среднем и крайнем отношении или «золотому сечению» по определению Леонардо да Винчи. Этот трактат написан под влиянием Леонардо и иллюстрирован его прекрасными рисунками, включая правильные (тела Платона) и полуправильные (тела Архимеда) многогранники, при построении которых золотое сечение используется многократно.

Заметим, что научно-философской школе Пифагора приписывается открытие всех пяти правильных многогранников, которые они обожествляли и считали элементами первоосновы бытия: огня (тетраэдр), земли (куб), воздуха (октаэдр), воды (икосаэдр) и всей Вселенной (додекаэдр). Позднее Платон в трактате «Тимей» изложил и расширил это учение пифагорейцев о правильных многогранниках, которые с тех пор называют Платоновыми телами.

Следует подчеркнуть, что и золотое сечение отрезка было известно пифагорейцам, а соответствующую пропорцию они называли, как и многое другое, божественной, однако не могли выразить ее через отношение ни совершенных, ни дружественных, ни других «магических» натуральных чисел. Более того, символом Пифагорейского союза служил правильный звездчатый пятиугольник - пентаграмма, буквально напичканный отношениями золотого сечения.

Однако сильнейший удар по первой из известных попыток математизации знаний на основе натуральных чисел и их отношений был нанесен пифагорейцам со стороны их любимицы - «Великой Тетраксис». Деление октавы на два неравных интервала (квинту и кварту) появилось из опыта. Попытка деления октавы пополам на основе музыкальной пропорции приводит к иррациональности вида $1: \pi/2$ . Кроме того, звучание струн с подобным отношением длин дает неприятный звук типа шума. Получалась логическая неувязка: струны - есть, шум - есть, а числа для этого шума - нет!? Известно, что явление несоизмеримости пифагорейцы впервые обнаружили в экспериментах с длинами струн и лишь потом доказали несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной (т. е. фактически иррациональность отношений их длин) на основе понятия четности чисел.

Это открытие было шоком для пифагорейцев, ибо подрывало основы их философии, что «Весь мир есть число». Поэтому несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной некоторое время сохранялось как великая тайна. Однако в диалоге Платона «Теэтет» утверждается, что пифагореец Феодор из Кирены (вторая половина V в. до н. э.) прочел в Афинах лекцию о несоизмеримости стороны квадратов с площадями от 2 до 15 (кроме 4 и 9) со стороной единичного квадрата. Убедившись на этих и других примерах, что геометрические величины (длины отрезков, площади и объемы) имеют более общую природу, чем натуральные числа и их отношения, поздние пифагорейцы положили геометрию в основу математики.

Нужно было обладать высоким уровнем абстрактного мышления и научной честностью, чтобы результат, полученный путем логического доказательства, поставить выше всего предыдущего опыта, интуиции и своей философии.

Однако интерес к «магическим числам» и универсальным геометрическим образам не утихал на протяжении всей истории развития науки. Так, Кеплер посвятил много времени установлению связи между известным тогда числом планет в Солнечной системе и пятеркой правильных многогранников. Даже открытие Галилеем с помощью подзорной трубы четырех спутников Юпитера не поколебало уверенности Кеплера в справедливости своей теории. Более того, в своем открытом письме-трактате «Разговор со звездным вестником ...» (1610 г.) он обращался к Галилею: «... между перигелием Марса и вершинами додекаэдра (в который, по Кеплеру, вписана орбита Земли), а также между центрами граней икосаэдра и афелием Венеры имеется свободное пространство ... В эти малые зазоры я надеюсь без труда поместить луны Марса и Венеры, если в один прекрасный день ты их обнаружишь...» Однако спутники у ближайших соседей Земли все не находились и Кеплер, как и пифагорейцы после открытия несоизмеримости, проявив поистине научное мужество, отказался от своей теории из-за очень незначительных по тому времени расхождений с наблюдениями и ... открыл три своих знаменитых закона! Но попытки увязать пять тел Платона и их геометрические свойства с числом и протяженностью промежутков между планетами прекратились лишь с открытием в 1781 г. Урана.

К традиционным магическим целым числам пифагорейцев в разные исторические моменты добавились новые: число $\pi\approx3{,}14...$, числа Фибоначчи, отношения золотого сечения и число Непера

$$\varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ \mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n\approx2{,}718\ldots,$$

мнимая единица $i=\sqrt{-1}$, постоянная тонкой структуры $a$, число Фейгенбаума.

Открытие несоизмеримостей пифагорейцами не только доказало несостоятельность первой попытки арифметизации математики на базе рациональных чисел, но и послужило началом развития тонких вопросов теории чисел, таких как классификация иррациональностей и бесконечные итерационные процессы, фактически приводящие к рядам и цепным дробям, суперпозиции радикалов и понятию предела.

Уже в новое время несколько интересных представлений для самого знаменитого из новых «магических» чисел - числа $\pi$, было найдено в результате действий с бесконечными рядами и произведениями. Таковы формулы Валлиса (1665 г.) и Лейбница (1673-74 гг.):

$$\pi=2\left(\frac{2}{1}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{8}{7}\right)^2\cdots$$

$$\pi=4\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\cdots\right).$$

При желании в этих формулах можно увидеть пифагорейские мотивы о роли женских и мужских, т.е. четных и нечетных чисел. Замечательную связь числа $\pi$ с минимальным женским числом дает знаменитая формула Виета (1540-1603 гг.):

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots,$$

который, видимо, первым систематически применял суперпозицию радикалов.

Неожиданные закономерности можно обнаружить в ряде формул, связывающие новые «магические» числа $\pi$ и $e$ со старыми пифагорейскими, в виде цепных дробей

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cdots}}}}, \qquad e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cdots}}}}.$$

Интересную связь между бесконечными радикалами и цепными дробями представляет формула

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}=1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cdots}}}=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},$$

которая при a=1 дает одно из чисел золотого сечения $\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Заметим, что дробная часть $\{\phi\}$ этого числа дает второе число золотого сечения: $\{\phi\}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\varphi$, а их произведение $\phi\bullet\varphi=1$, т.е. два числа золотого сечения взаимообратны. Если из предыдущей формулы при a=1 взять разложение $\{\phi\}=\varphi$ в виде цепной дроби и построить «усеченные дроби», откидывая бесконечные «хвосты», то можно получить так называемые подходящие дроби

$$1,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{13},\frac{13}{21},\frac{21}{34},\frac{34}{55},\frac{55}{89},\frac{89}{144},\ldots,$$

которые образуют обвертывающий ряд, имеющий своим пределом число $\varphi$. Числители и знаменатели этих подходящих дробей образуют ряд Фибоначчи

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,...

первые 14 чисел которого впервые были приведены Леонардо Пизанским (1180 -1240 гг.) по прозвищу Фибоначчи (что означает «сын доброго») в его знаменитой модельной задаче о потомстве пары кроликов. Числа Фибоначчи для $\forall n\in N$ определяются рекуррентным соотношением $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ при начальных данных $F_1=F_2=1$.

Соотношение Кассини (1680 г.) $F_{n+1}\cdot F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$, $n\in N$ является одним из первых математических фактов о числах Фибоначчи. Процесс редукции $F_{n+k}$ к комбинации $F_n$ и $F_{n+1}$ приводит к интересной закономерности

$$F_{n+k}=F_kF_{n+1}+F_{k-1}F_n \qquad (1)$$

При n=k из этой формулы следует, что $F_{2n}=F_n(F_{n+1}+F_{n-1})\Rightarrow F_{2n}$ кратно $F_n$, аналогично из $F_{3n}=F_{2n}F_{n+1}+F_{2n-1}F_n \Rightarrow F_{3n}$ кратно $F_n$. Более того, можно доказать, что не только $F_{kn}$ кратно $F_n$, но и Н.О.Д.( $F_n$ , $F_k$ )=$F_{\text{нод}(n,k)}$.

Обобщение подобных понятий делимости чисел Фибоначчи позволило Ю. Матиясевичу (1970 г.) доказать алгоритмическую неразрешимость 10-й проблемы Гилберта для произвольного диофантова уравнения. Два года спустя был доказан некий аналог основной теоремы арифметики на базе чисел Фибоначчи, которая гласит, что для $\forall n \in N$ существует единственное представление в виде суммы (а не произведения, как в канонической записи) чисел Фибоначчи. Например, миллион представим в виде

$$10^6 = F_{30} + F_{26} + F_{24} + F_{12} + F_{10}.$$

Подчеркнем, что любая система однозначного представления чисел является системой счисления, в данном случае на основе чисел Фибоначчи. В широко известной работе Воробьева представлены многие другие свойства чисел Фибоначчи, их многочисленные приложения в комбинаторной математике, геометрии, теории поиска и кодировании информации, других разделах математики. Отметим лишь красивую формулу Бине (1843 г.), которая в замкнутой форме дает выражение чисел Фибоначчи через отношения золотого сечения

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right] = \frac{\phi^n - \varphi^n}{\sqrt{5}}.$$

Подчеркнем, что впервые эта формула была опубликована Д. Бернулли еще в 1728 г., однако на столетие ее забыли после шока от парадоксальных формул Эйлера $e^{\pi i} + 1 = 0$ и $e^{2\pi i} = 1$, каждая из которых не только связывает пять «магических» чисел разной природы e, π, i, 0, 1, но и спустя столетие послужила основой для доказательства трансцендентности числа л.

Многочисленные проявления чисел Фибоначчи и отношений золотого сечения в природе одним из первых заметил великий Кеплер, он же установил, что, $F_{n+1} / F_n \to \phi$, хотя строго доказал это Симпсон спустя почти век. С тех пор «использование» природой чисел Фибоначчи и отношений золотого сечения установлено не только в ботанике при описании винтового расположения листьев на побегах вида $F_{n-1} / F_{n+1}$; семян в подсолнухе или шишках хвойных деревьев вида $F_n / F_{n+1}$; но и в расположении аминокислотных остатков в спиралях полипептидов различных молекулярных цепей; в структуре важных биомолекул, отвечающих за генетический код наследственности; биоритмах мозга и работе сердца человека, а также очень многих других вопросах биологии, перечислить которые здесь нет возможности.

Приведем менее известное проявление чисел Фибоначчи и золотого сечения в стехиометрии таких химических соединений как оксиды урана или хрома и фазах Юм-Розери. По возрастанию величины O/U достоверно установленные в области $UO_2$ - $UO_3$ оксиды урана образуют некоторый ряд, где присутствуют соединения, в формулах которых стехиометрические коэффициенты равны числам Фибоначчи не в случайном, а закономерном порядке (см. таблицу), причем мольный состав этих оксидов состоит из $UO_2$ и $UO_3$ в долях, задаваемых тоже числами Фибоначчи!

| | | |
|---|---|---|
| $U_2O_5 = UO_3 + UO_2$ | $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ | $1 = \varphi + \varphi^2$ |
| $U_3O_8 = 2UO_3 + UO_2$ | $F_{n+3} = 2F_{n+1} + F_n$ | $1 = 2\varphi^2 + \varphi^3$ |
| $U_5O_{13} = 3UO_3 + 2UO_2$ | $F_{n+4} = 3F_{n+1} + 2F_n$ | $1 = 3\varphi^3 + 2\varphi^4$ |
| $U_8O_{21} = 5UO_3 + 3UO_2$ | $F_{n+5} = 5F_{n+1} + 3F_n$ | $1 = 5\varphi^4 + 3\varphi^5$ |
| $U_{13}O_{34} = 8UO_3 + 5UO_2$ | $F_{n+6} = 8F_{n+1} + 5F_n$ | $1 = 8\varphi^5 + 5\varphi^6$ |

Опубликовано в 2000 году.